CLEAI, matematica generale, primo semestre 2003-2004
Soluzioni degli esercizi della prova scritta del 16 giugno 2004

Studio di funzione:
Disegnare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) := x^2 e^{x^2}$$

Svolgimento:
La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Dunque i limiti vanno fatti soltanto in $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{x^2} = +\infty;$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{x^2} = +\infty.$$

Visti i limiti appena calcolati, deduciamo che:

- non ci sono asintoti verticali o orizzontali;
- potrebbero esserci asintoti obliqui verso $-\infty$ e $+\infty$. Ma poiché

  $$\lim_{x\to\pm\infty} (x^2 e^{x^2})/x = \lim_{x\to\pm\infty} x e^{x^2} = \pm\infty$$

  ne deduciamo che non ci sono asintoti obliqui.

La monotonia è data dal segno della derivata prima.

$$f'(x) = (x^2 e^{x^2})' = 2xe^{x^2} + x^2(2xe^{x^2}) = 2xe^{x^2}(x^2+1).$$

Il fattore e^{x^2} ha segno sempre positivo, così come x^2+1, mentre $2x$ è positivo nell'intervallo $(0,+\infty)$. Dunque f è crescente in tale intervallo, e il punto $(0, f(0) = 0)$ è un minimo locale e globale.

La concavità è data dal segno della derivata seconda.

$$f''(x) = (2xe^{x^2}(x^2+1))' = 2e^{x^2}(x^2+1) + 4x^2e^{x^2}(x^2+1) + 4x^2e^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^4+5x^2+1).$$

Il fattore $2e^{x^2}$ ha segno sempre positivo, mentre $2x^4+5x^2+1$ è un trinomio di quarto grado riducibile a un trinomio di secondo grado con la sostituzione $t = x^2$. Ponendo $t = x^2$ in $2x^4+5x^2+1$, otteniamo $2t^2+5t+1$, che è negativo nell'intervallo $((-5-\sqrt{17})/4, (-5+\sqrt{17})/4)$, e positivo al di fuori. Poiché $\sqrt{17}$ è evidentemente più piccolo di 5, e $t = x^2$ non può essere negativo, otteniamo che $2x^4+5x^2+1$ è sempre positivo. Dunque la concavità di f è rivolta sempre verso l'alto, e non ci sono flessi di alcun tipo.

Collazionando tutte le suddette informazioni, si ottiene il grafico di f (figura 1).

Studio di grafico di funzione:

Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 2, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 3; (l) punti di non derivabilità.

Svolgimento:

(a) CE $= (-5,-2] \cup (-1,+\infty)$, CE$' = [-5,-2] \cup [-1,+\infty]$.

(b) Gli zeri sono le ascisse delle intersezioni con l'asse x, cioé $\{-3, 2\}$.

(c) Intersezioni con l'asse x: $(-3,0)$, $(2,0)$. Intersezioni con l'asse y: $(0,-2)$.

(d) Il segno è positivo in $(-5,-3) \cup (2,+\infty)$, negativo in $[-3,-2) \cup (-1,2)$.

(e) Le discontinuità vanno cercate nel campo di esistenza della funzione, e graficamente corrispondono a "salti" nel grafico. Nel nostro caso, non ci sono salti della funzione nel campo di esistenza.

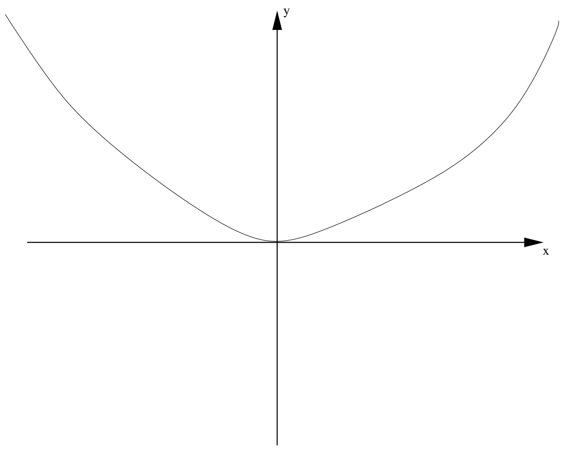

Figura 1: Grafico di f. Notare che essendo la funzione un prodotto di funzioni elementari continue e derivabili, non si hanno punti di discontinuità o di non derivabilità.

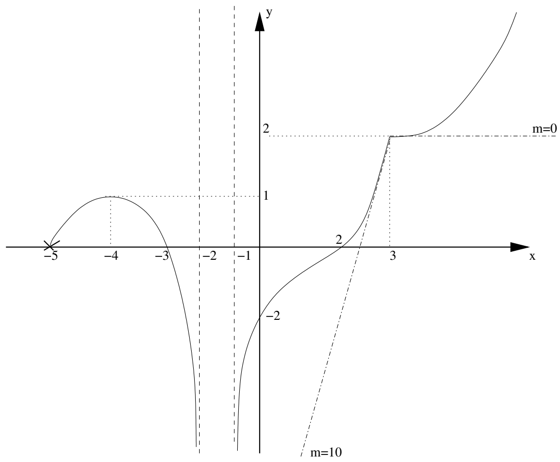

Figura 2: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

(f) Poiché la funzione è continua in tutto il suo campo d'esistenza, i limiti non banali sono quelli in $\mathrm{CE}' - \mathrm{CE} = \{-5, -2, -1, +\infty\}$.

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = 0;$$
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty;$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty;$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

(g) $x = -2$ e $x = -1$ sono asintoti verticali.

(h) I punti critici sono i punti in cui la tangente è orizzontale (cioé i punti in cui la derivata è zero): abbiamo solo $(-4, 1)$ (nel punto $(3, 2)$ la funzione non è derivabile, vedi (l)) .

(i) La funzione è monotona crescente in $(-5, -4) \cup (-1, +\infty)$, monotona decrescente in $(-4, -2)$.

(j) Massimo globale: non esiste. Minimo globale: non esiste. Massimo locale: $(-4, 1)$. Minimi locali: non esistono.

(k) La tangente sinistra in 3 è $y - 2 = 10(x - 3)$, la tangente destra in 3 è $y = 2$.

(l) Le tangenti destra e sinistra di f in 3 sono diverse, dunque f non è derivabile in 3.

Massimi e minimi:

Determinare i minimi e i massimi (locali e globali) sull'intervallo $(1,3]$ della seguente funzione:

$$f(x) := 3x^3 - 3x^2 - 1$$

Svolgimento:

Studio sommario di $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 1$. La derivata prima è $9x^2 - 6x = 3x(3x-2)$, negativa nell'intervallo $(0, 2/3)$. Dunque la nostra funzione è crescente nell'intervallo richiesto, e ha un massimo (locale e globale) in $(3, f(3) = 53)$.

Teorico:

Dire se $f(x) := 2\ln\sqrt{x^4+1}$ ammette massimi e minimi nell'intervallo $[0, 513]$ (giustificare la risposta).

Svolgimento:

Si, per il teorema di Weierstrass (f è continua e $[0, 513]$ è compatto).

Punti fissi:

Trovare i punti fissi di $f(x) := x^3 + x - 1$.

Svolgimento:

I punti fissi di f sono le soluzioni dell'equazione $x^3 + x - 1 = x$. Dunque il problema è equivalente a trovare gli zeri di $F(x) = x^3 - 1$.

Zeri:

Trovare i punti critici di $f(x) := x^3 - 3x + 1$.

Svolgimento:

I punti critici sono i punti in cui la derivata prima si annulla. Abbiamo

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

che ci dà $x = \pm 1$. Dunque i punti critici di f sono $(-1, f(-1) = 3)$ e $(1, f(1) = -1)$.